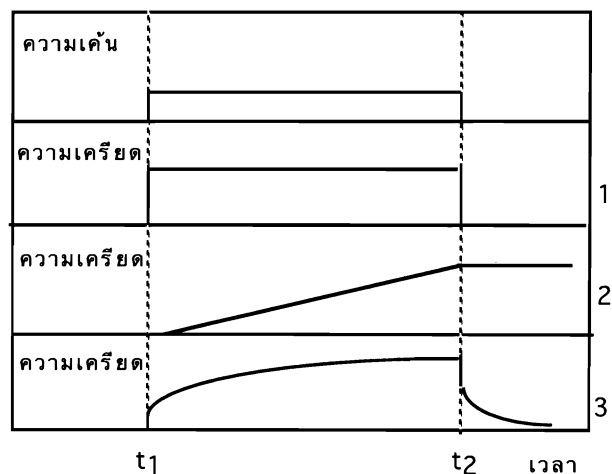


ความยืดหยุ่นหนืดแบบไม่เป็นเชิงเส้นของพอลิเมอร์ (Non-linear viscoelasticity of solid polymer)



ดร. จินตมัย สุวรรณประทีป
ศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ
กระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม

โดยทั่วไปนั้นเมื่อกล่าวถึงสมบัติเชิงกลของสสารแล้ว วัสดุในอุดมคติที่เป็นที่รู้จักกันดีได้แก่ของแข็งยืดหยุ่น (Elastic Solid) และของเหลวหนืด (Viscous Liquid) โดยของแข็งยืดหยุ่นนั้น เมื่อได้รับแรงกระทำจากภายนอกก็จะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปอยู่ในสมดุลใหม่ เมื่อแรงกระทำนั้นถูกลดให้เป็นศูนย์ วัสดุก็จะคืนสภาพกลับสู่รูปร่างหรือสมดุลดั้งเดิมทันที (ยกเว้นในกรณีที่ผ่านมาจุด Yield) ตรงกันข้ามกับของเหลวหนืดที่จะเป็นรูปร่างอย่างไม่สามารถคืนตัวกลับมาอยู่ในสภาพเดิมเมื่อไม่มีแรงกระทำแล้วซึ่งความสัมพันธ์จะเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke's Law) และกฎของนิวตัน (Newton's Law) ตามลำดับ พอลิเมอร์นั้นไม่สามารถจะจัดอยู่ในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งข้างต้นเนื่องจากมีลักษณะเป็นได้ทั้งของแข็งเปราะ ของแข็งยืดหยุ่น หรือของเหลวหนืด ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบต่างๆ เช่นอุณหภูมิ เวลา อัตราเร็วในการทดสอบตัวอย่าง เป็นต้น ซึ่งวัสดุที่มีสมบัติประเภทนี้จะถูกเรียกว่าวัสดุยืดหยุ่นหนืด (Viscoelastic materials) รูปที่ 1 แสดงการตอบสนองของวัสดุประเภทต่างๆ ดังที่กล่าวมาเมื่อวัสดุได้รับแรงเค้น ณ เวลา t_1 และนำแรงเค้นออก ณ เวลา t_2 จะเห็นได้ว่าวัสดุยืดหยุ่นหนืด (Viscoelastic Materials) นั้นจะแสดงสมบัติที่ผสมกันของทั้งของแข็งยืดหยุ่น และของเหลวหนืด



รูปที่ 1 การตอบสนองของวัสดุประเภทต่างๆ เมื่อได้รับแรงเค้น ; 1 คือ ของแข็งยืดหยุ่น ; 2 คือ ของเหลวหนืด ; 3 คือ วัสดุยืดหยุ่นหนืด

ความยืดหยุ่นหนืดแบบเชิงเส้น (Linear Viscoelasticity)

ทฤษฎีของความยืดหยุ่นหนืด (Viscoelasticity) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ที่ไม่เป็นสัดส่วนคงที่ ขึ้นอยู่กับเวลาในการตอบสนองของวัสดุ คือ ความสัมพันธ์นี้จะมีลักษณะที่ไม่คงที่แต่จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งถ้าเป็นความยืดหยุ่นหนืด

แบบเชิงเส้น (Linear Viscoelasticity) นั้นความสัมพันธ์ก็จะขึ้นอยู่กับเวลาเท่านั้น ดังที่กล่าวมาแล้วและสามารถเขียน

ความสัมพันธ์โดยทั่วไปในลักษณะของสมการดิฟเฟอเรนเชียลได้ดังสมการที่ 1

$$a_n \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sigma}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_0 \sigma = b_m \frac{\partial^m \epsilon}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \epsilon}{\partial t^{m-1}} + \dots + b_0 \epsilon \quad 1)$$

โดยที่ σ คือความเค้น ϵ คือความเครียด t คือเวลา และ a และ b คือค่าคงที่ซึ่งจะไม่ขึ้นอยู่กับความเค้นและความเครียดแต่อาจจะขึ้นอยู่กับเวลาได้

สมการนี้สามารถใช้แสดงความสัมพันธ์ทั่วไปของวัสดุยืดหยุ่นชนิดใดโดยสามารถถูกลดรูปในกรณีพิเศษต่างๆ เช่น สำหรับของแข็งยืดหยุ่นและของเหลวชนิดดั่งที่ได้กล่าวมาข้างต้น

Maxwell Element

$$a_1 \frac{d\sigma}{dt} + a_0 \sigma = b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$$

โดยที่ $a_0, b_0, b_1 \neq 0$ ส่วนค่าคงที่อื่นมีค่าเป็น 0

Hookean Solid

$$a_0 \sigma = b_0 \epsilon$$

โดยที่ $a_0, b_0 \neq 0$ ส่วนค่าคงที่อื่นมีค่าเป็น 0

Newtonian Fluid

$$a_0 \sigma = b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$$

โดยที่ $a_0, b_1 \neq 0$ ส่วนค่าคงที่อื่นมีค่าเป็น 0

ส่วนในกรณีของโมเดลเชิงกล (Mechanical Models) ซึ่งได้ถูกใช้อธิบายสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นชนิดแบบเชิงเส้นโดยจำลองลักษณะของวัสดุด้วยการนำสปริงและลูกสูบมาต่อเรียงกันนั้น ก็เป็นกรณีพิเศษของสมการที่ 1 เช่นเดียวกันดังแสดงไว้ดังสมการตัวอย่างข้างล่างสำหรับโมเดลพื้นฐานที่สุดคือ Voigt และ Maxwell

Voigt และ Maxwell

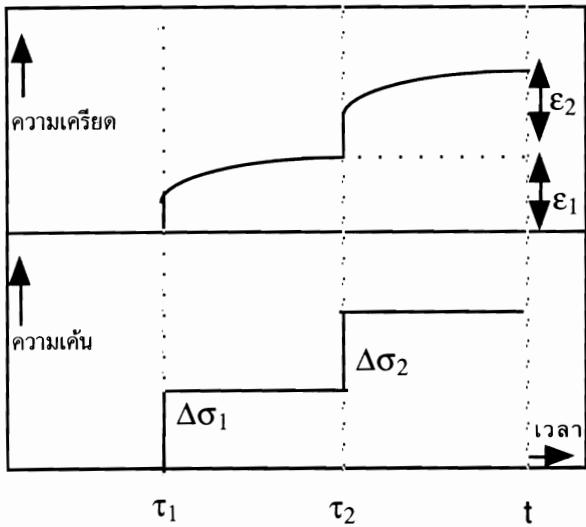
$$a_0 \sigma = b_0 \epsilon + b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$$

โดยที่ $a_0, b_0, b_1 \neq 0$ ส่วนค่าคงที่อื่นมีค่าเป็น 0

นอกจากสมการดิฟเฟอเรนเชียลแล้ว ในการอธิบายความสัมพันธ์ในวัสดุยืดหยุ่นชนิดยังสามารถใช้สมการอินทิเกรชันได้อีกด้วยซึ่งได้แก่การใช้หลักการของ Boltzmann Superposition โดยจะแสดงว่าสมบัติของวัสดุนั้น จะไม่ถูกรบกวนจากการรับความเค้นในอดีต ซึ่งเมื่อมีการให้แรงเค้นลงบนวัสดุเป็นจำนวนหลายๆครั้ง ความเครียดโดยรวมของวัสดุจะมีค่าเท่ากับผลรวมของความเครียดย่อยในแต่ละขั้นตอนของการให้แรงเค้นดังสมการที่ 2

$$\epsilon(t) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n$$

$$\epsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t-\tau_1) + \Delta\sigma_2 J(t-\tau_2) + \dots + \Delta\sigma_n J(t-\tau_n) \quad 2)$$



รูปที่ 2 หลักการของ Boltzmann Superposition

ตัวอย่างแสดงให้เห็นในรูปที่ 2 ซึ่งเป็นการใส่แรงเค้น (σ) ณ เวลา τ_1 และใส่แรงเค้นค่าเดิมเพิ่มเข้าไปอีกครั้ง ณ เวลา τ_2 ความเครียดรวม (ϵ) ณ เวลา t จะเท่ากับ $\epsilon_1 + \epsilon_2$ โดย ϵ_1 และ ϵ_2 คือความเครียดที่เกิดจากความเค้นจากขั้นที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ซึ่งจากความสัมพันธ์นี้จะช่วยให้สามารถทำนายสภาพหรือค่าของความเค้นหรือความเครียดของวัสดุได้ถ้าหากทราบถึงประวัติที่ผ่านความเค้นหรือความเครียดย่อย

ความยืดหยุ่นชนิดแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear Viscoelasticity)

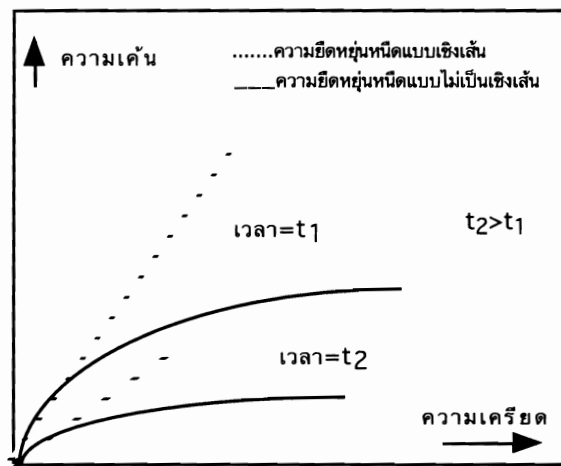
พอลิเมอร์นั้นโดยธรรมชาติแล้วจะแสดงสมบัติยืดหยุ่นชนิดแบบเชิงเส้นดังที่กล่าวมาแล้วนั้นถึงระดับของความเครียดหรือความเค้นระดับหนึ่งเท่านั้น ซึ่งจะมักเป็นค่าที่ต่ำ เมื่อความเค้นหรือความเครียดมีค่าสูงเกินระดับนี้แล้ว พอลิเมอร์จะแสดงสมบัติแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear Viscoelasticity) แทนโดยความสัมพันธ์ของ

ความเครียดและความเค้นนั้นนอกจากจะขึ้นอยู่กับเวลาแล้วยังขึ้นอยู่กับระดับของค่าความเครียดและความเค้นอีกด้วยดังแสดงในสมการข้างล่างนี้

$$\epsilon(t) = f(t)g(\sigma) \text{ หรือ } \sigma(t) = f(t)g(\epsilon) \quad (3)$$

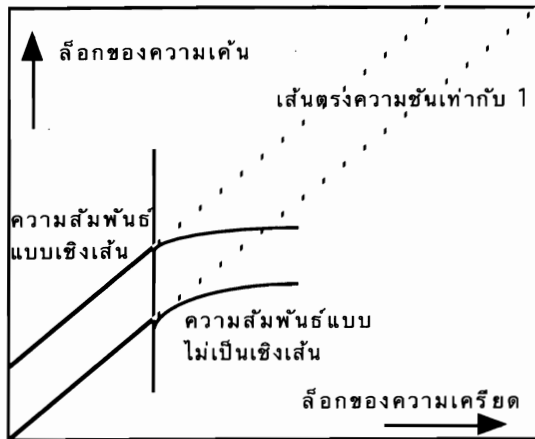
$$\text{และ } \epsilon(t) = f(t,\sigma) \text{ หรือ } \sigma(t) = f(t,\epsilon) \quad (4)$$

โดยในสมการที่ 3 แสดงถึงความสัมพันธ์เมื่อความเค้นหรือความเครียดมีค่าต่ำ ความซับซ้อนของความสัมพันธ์ยังไม่สูงมากคือฟังก์ชันของเวลาและความเค้นหรือความเครียดยังสามารถแยกพิจารณาอิสระจากกันได้ ในขณะที่เมื่อความเค้นหรือความเครียดมีค่าสูงขึ้น ฟังก์ชันดังกล่าวจะไม่สามารถแยกออกจากกันได้ (สมการที่ 4) รูปที่ 3 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างความยืดหยุ่นชนิดแบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้นในรูปของความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด ณ เวลาต่างกัน จะเห็นว่าเมื่อค่าความเค้นหรือความเครียดสูงขึ้น ความสัมพันธ์ก็จะเป็นเส้นตรงมากขึ้น



รูปที่ 3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดแสดงถึงความยืดหยุ่นชนิดแบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้น

เพื่อความชัดเจนในการทราบว่าความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้นหรือไม่ สามารถทำได้โดยใช้ความสัมพันธ์ในรูปของลอการิทึมของทั้ง 2 แกน แทนดังแสดงในรูปที่ 4 ซึ่งเส้นตรงที่ทำมุม 45 องศา มีค่าความชันเท่ากับ 1 จะเป็นตัวแทนของลักษณะเชิงเส้น กราฟที่เบี่ยงเบนออกไปจากค่าความชันนี้ จะหมายถึงลักษณะที่ไม่เป็นเชิงเส้น พอลิเมอร์ประเภทต่างๆ ก็จะมีระดับความเครียดหรือความเค้นที่เริ่มแสดงสมบัติแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ต่างกัน โพลิเมอร์อสัณฐาน (Amorphous Polymer) โดยทั่วไปจะเริ่มแสดงสมบัติแบบไม่เป็นเชิงเส้นเมื่อค่าความเครียดสูงเกินกว่าประมาณ 1% ในขณะที่พอลิเมอร์ผลึก (Crystalline Polymer) จะเริ่มที่ค่าความเครียดต่ำกว่ามากคือ ประมาณ 0.1-0.2%



รูปที่ 4 การใช้ลอการิทึมในการพิจารณาความยืดหยุ่นชนิดแบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้น

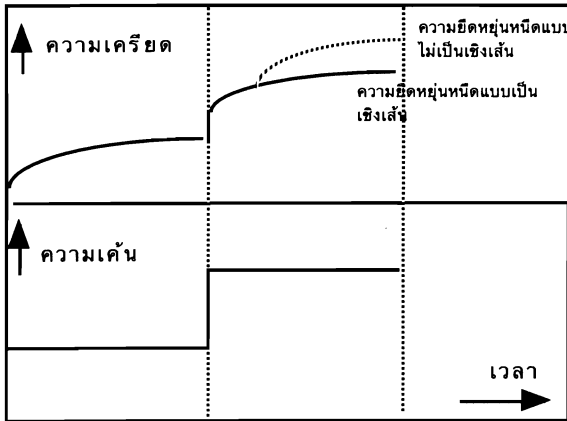
เมื่อสมบัติของโพลิเมอร์ขึ้นอยู่กับระดับของค่าความเครียดและความเค้นแล้วทฤษฎี Boltzmann Superposition จะไม่สามารถใช้อธิบายได้อย่างถูกต้องเนื่องจากความสัมพันธ์จะไม่เป็นเชิงเส้นเมื่อมีการให้แรงเค้นสะสมบนวัสดุ (รูปที่ 5) การเพิ่มความเค้น 2 เท่าจะไม่ทำให้เกิด

ค่าความเครียดเป็น 2 เท่าเหมือนในความสัมพันธ์แบบยืดหยุ่นชนิดแบบเชิงเส้น ซึ่งจะเห็นได้ว่าความเครียดรวมจะมีค่าไม่เท่ากับการรวมกันของความเครียดย่อยในแต่ละชั้น โดยการใช้ทฤษฎีจะทำนายค่าที่ต่ำกว่าค่าจริง ได้มีความพยายามที่จะสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ Superposition สำหรับวัสดุที่แสดงสมบัติยืดหยุ่นชนิดแบบไม่เชิงเส้นได้แก่ทฤษฎี Multiple Integral ดังแสดงอยู่ในสมการที่ 5

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & \int_0^1 J_1(t - \tau_1) \frac{d\sigma(\tau_1)}{d\tau_1} d\tau + \int_0^1 J_2 \\ & (t - \tau_1, t - \tau_2) \frac{d\sigma(\tau_1)}{d\tau_1} \frac{d\sigma(\tau_2)}{d\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \dots + \int_0^1 \dots \int_0^1 J_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \\ & \frac{d\sigma(\tau_1)}{d\tau_1} \dots \frac{d\sigma(\tau_n)}{d\tau_n} d\tau_1 \dots d\tau_n \end{aligned} \quad (5)$$

โดย J คือ Compliance และ t_n คือเวลาที่ความเค้นมีการเปลี่ยนแปลง

ถึงแม้สมการนี้จะถูกอ้างว่าสามารถทำนายพฤติกรรมของโพลิเมอร์ซึ่งมีสมบัติยืดหยุ่นชนิดแบบไม่เชิงเส้นได้แต่ก็ยังมีข้อจำกัดในการใช้งานอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งได้แก่ความซับซ้อนของสมการทำให้ยุ่งยากในการใช้งาน นอกจากนี้ยังมีข้อจำกัดทางความแม่นยำ เมื่อใช้ในกรณีที่ค่าความเค้นถูกลดลง



รูปที่ 5 หลักการ Boltzmann Superposition กับความยืดหยุ่นชนิดแบบไม่เป็นเชิงเส้น

อิทธิพลของตัวแปรอื่นกับความยืดหยุ่นชนิดแบบไม่เป็นเชิงเส้น

นอกจากความเค้นหรือความเครียด(แล้วแต่กรณี) ที่มีผลต่อความไม่เป็นเชิงเส้นของความยืดหยุ่นชนิดของพอลิเมอร์แล้ว ปัจจัยหรือตัวแปรอื่นที่จะสามารถมีผลต่อระดับความไม่เป็นเชิงเส้นของพอลิเมอร์ ได้แก่ อุณหภูมิและ Anisotropy ในกรณีแรก เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น ความไม่เป็นเชิงเส้นของพอลิเมอร์ เช่น พอลิคาร์บอเนต จะเกิดขึ้นที่ระดับความเค้นหรือความเครียดที่ต่ำลง สำหรับในกรณีของ Anisotropy นั้น ระดับหรือลักษณะของการเกิด Anisotropy ในวัสดุจะมีผลทำให้ระดับความไม่เป็นเชิงเส้นของพอลิเมอร์ชนิดเดียวกันแตกต่างกันได้ ตัวอย่างเช่น ชิ้นงานตัวอย่างที่ตัดจากแผ่นพอลิเอทิลีนชนิดความหนาแน่นต่ำหลังจากผ่านการถูกดึงในทิศทางเดียวจะมีระดับความไม่เป็นเชิงเส้นที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับมุมในการตัดชิ้นงานจากแผ่นตัวอย่างเทียบกับทิศทางของการดึง ชิ้นงานที่ตัดที่มุมน้อยกว่า 45 องศา จะแสดงสมบัติยืดหยุ่นชนิดเชิงเส้นจนถึงระดับความเครียดประมาณ 0.7% ในขณะที่ชิ้นงานที่ถูกตัดในมุมที่มากกว่า 45 องศา จะ

แสดงการลดลงของระดับของความเครียดที่วัสดุจะคงสมบัติเชิงเส้น จนเมื่อมุมมีค่าเท่ากับ 90 องศาหรือตั้งฉากกับทิศทางการดึง ความเป็นเชิงเส้นจะมีปรากฏอยู่ที่ระดับความเครียดต่ำกว่ามากคือประมาณ 0.1% เท่านั้น

บทส่งท้าย

ความไม่เป็นเชิงเส้นของความยืดหยุ่นชนิดในพอลิเมอร์นั้นเป็นสิ่งที่สร้างความยุ่งยากในการศึกษาและทำนายสมบัติเชิงกลของพอลิเมอร์ โดยเฉพาะสมบัติเชิงกลระยะยาวเพื่อการออกแบบผลิตภัณฑ์ในการใช้งาน การนำมาใช้งานแทนของทฤษฎีความยืดหยุ่นชนิดแบบเชิงเส้นนั้นเป็นสิ่งที่ทำได้แต่จะต้องใช้ด้วยความระมัดระวังและมีความเข้าใจว่าในช่วงของความเค้นหรือความเครียดในการใช้งานโดยทั่วไปนั้น พอลิเมอร์จะแสดงสมบัติยืดหยุ่นชนิดแบบไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งสมบัติของวัสดุจะไม่คงที่ขึ้นอยู่กับเวลาและระดับความเค้นและความเครียดในการใช้งานอีกด้วย

ภาคผนวก

Compliance หมายถึง ความสามารถของวัสดุในการเปลี่ยนรูปร่างเมื่อได้รับแรงเค้น ซึ่งโดยทั่วไปจะเป็นสัดส่วนกลับของค่ามอดูลัส

Anisotropy หมายถึง การที่วัสดุมีสมบัติที่ไม่เท่ากันในทุกทิศทาง

เอกสารอ้างอิง

1. I.V. Yannas and A.C. Lunn (1971) In A. Peterlin (Ed.),
Plastic Deformation of Polymers, New York : Marcel Dekker, Inc.
2. M.W. Darlington and D.W. Saunders (1971), *Journal of
Macromolecular Science*, B5(2), 207.
3. S. Turner (1973) In R.N. Harwards(Ed.), *The Physics of Glassy
Polymer*, London : Applied Science Publishers., Ltd.
4. I.M. Ward (1983), *Mechanical Properties of Solid Polymers*,
Chichester : John Wiley & Sons.
5. J. Suwanprateeb(1996), PhD Thesis, University of London.